作者简介：樊陈卫，（1978-），女，江苏海门人，中学高级教师，南通市骨干教师。主要研究解题教学和高考试题动向，在《中学数学》《数学教学》《中学数学研究》《中学数学教学》《高中数学教与学》等杂志发表论文多篇。

基于经典命题 命制多彩好题

江苏省海门中学　樊陈卫　226100

数学题目的命制是一线教师的一项重要工作，命题能力是数学教师实现进阶的一项必备能力，是数学教师教学能力与数学专业素养的重要体现.本文以一个经典命题为出发点命制题目为例，谈谈如何命制多彩好题，不足之处敬请斧正.

经典命题 设 *O* 是 ΔABC 内一点，则 $S_{\Delta BOC}\overrightarrow{OA}+S_{\Delta AOC}\overrightarrow{OB}+S_{\Delta AOB}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

命题源于 2002 年山东赛区高中数学竞赛试题，形式简捷，结论深刻而富于美感.

命制思路 1　特殊化，命题的直接应用.

1.1 变量常量化

设 *O* 是 ΔABC 内一点，$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，根据命题可以得到 $S_{\Delta BOC}$：$S_{\Delta AOC}$：$S_{\Delta AOB}=x:y:z$，由此可以命制题目如下：

例 1　设 *O* 是 ΔABC 内一点，$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，$S_{\Delta AOC}=10$，则 $S_{\Delta ABC}=$____

（答案：30）

1.2 动点定点化

原命题中 *O* 点是 ΔABC 内的任意点，将其特殊化为三角形的“四心”，可以得到如下题组：

例 2　证明如下命题：

（1）设 *O* 是 ΔABC 的重心，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

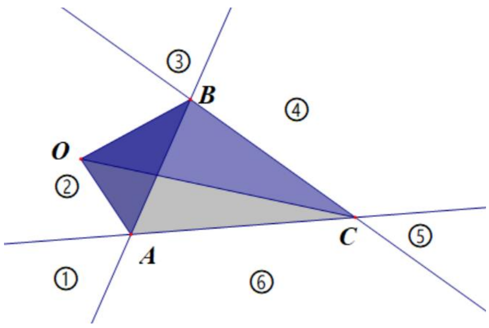
（2）设 *O* 是 ΔABC 的内心，则 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

（3）设 *O* 是 ΔABC 的外心，则 $\sin 2A\overrightarrow{OA}+\sin 2B\overrightarrow{OB}+\sin 2C\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

（4）设 *O* 是 ΔABC 的垂心，则 $\tan A\overrightarrow{OA}+\tan B\overrightarrow{OB}+\tan C\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

命制思路 2　命题一般化推广

考虑将条件“*O* 点是 ΔABC 内的任意点”推广到平面 ABC 内的任意点，利用 Geogebra 软件面积度量及计算功能可以验证原命题不成立，但仍然存在一定的向量组合关系：点 O 在三角形三边上时，原命题仍成立；点 O 在三角形外部时存在的规律如下，以点 O 在②⑤区域（含边界）时（①④，③⑥情形类似）：



$$S_{\Delta BOC}\overrightarrow{OA}+S_{\Delta AOC}\overrightarrow{OB}-S_{\Delta AOB}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

基于此，设计新定义题目如下：

例 3　设 *O* 平面内任意一点，规定 ΔOAC、ΔOAB、ΔOBC 分别与 ΔABC 在顶点 O 所对边

同侧，其面积为正面积；在 O 所对边异侧，其面积为负面积，则等式 $S_{\Delta BOC}\overrightarrow{OA}+S_{\Delta AOC}\overrightarrow{OB}+S_{\Delta AOB}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ 是否成立？若不成立，说明理由；若成立，请证明.

命制思路 3 空间类比

二维平面与三维立体空间类比，三角形与四面体相对应，三角形的面积对应于四面体的体积，可以得到如下命题：

例 4 有命题：O 是 ΔABC 内一点，则 $S_{\Delta BOC}\overrightarrow{OA}+S_{\Delta AOC}\overrightarrow{OB}+S_{\Delta AOB}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，请根据上述命题，进行二维平面与三维空间的类比猜想：O 是四面体 ABCD 内一点，则有结论：______________________________.

（答案 $V_{O-BCD}\overrightarrow{OA}+V_{O-ACD}\overrightarrow{OB}+V_{O-ABD}\overrightarrow{OC}+V_{O-ABC}\overrightarrow{OD}=\vec{0}$）

命制思路 4 与其它知识交汇

将原命题及由原命题所得的新命题与其它知识交汇，又生成更多生动的题目.

4.1 与命题逻辑交汇

考虑例 2（2）的逆命题得到如下题目：

例 5 （1）设 O 是 ΔABC 内的一点，a、b、c 为 ΔABC 的三边，且 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，求证：$O$ 是 ΔABC 的内心.

再结合例 3 可得：

（2）设 O 是 ΔABC 内的一点，a、b、c 为 ΔABC 的三边，且 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}-c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，求证：$O$ 是 ΔABC 的旁心.

4.2 与正余弦定理交汇

由命题的条件为三角形，正余弦定理是三角形的重要定理，与正余弦定理交汇是自然的思路.从结论“O 是 ΔABC 的重心，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$”出发，再给出条件“$\frac{\sin A}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{\sin B}{7}\overrightarrow{OB}+\frac{\sin C}{8}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$”，相当于给出三角形三内角的正弦比，结合正余弦定理，可以求出三角形任意内角：

例 6 已知 O 是 ΔABC 的重心，且满足 $\frac{\sin A}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{\sin B}{7}\overrightarrow{OB}+\frac{\sin C}{8}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，求角 B.（答案：$\frac{\pi}{3}$）

从结论“O 是 ΔABC 的内心，则 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$”出发，再给条件“$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$”，引入两个变量 x、y，两个等式结合相当于给出由 x、y 表示的三角形的三边之比，再用条件“$\cos A=\frac{7}{8}$”给出三边的数量关系，由此可以求出含参数 x、y 的代数式的最值：

例 7 已知 O 是 ΔABC 的内心，$\cos A=\frac{7}{8}$，若 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 $x+y$ 的最大值.（答案：4）

4.3 与三角函数恒等变换交汇

命题的条件为三角形，离不开三角形的内角，可考虑与三角函数的恒等变形交汇.以命题“O 是 $\Delta\mathrm{ABC}$ 的垂心，则 $\tan\mathrm{A}\overrightarrow{OA}+\tan B\overrightarrow{OB}+\tan C\overrightarrow{OC}=\vec{0}$”为起点，与等式“$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$”结合，相当于给出了三角形的内角的正切比，再利用三角形的内角和定理和三角函数的恒等变形，可以求出三角形内角的三角函数值：

例 8 O 是 $\Delta\mathrm{ABC}$ 的垂心，$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，求 $\cos\angle BAC$ 的值.（答案：$\frac{\sqrt{3}}{3}$）

以命题“设 O 是 $\Delta\mathrm{ABC}$ 的外心，则 $\sin 2A\overrightarrow{OA}+\sin 2B\overrightarrow{OB}+\sin 2C\overrightarrow{OC}=\vec{0}$”为起点，结合等式“$\overrightarrow{OC}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$”，相当于给出了三角形内角的二倍角的正弦比，利用三角函数恒等变形可以进一步求出三角形内角的正弦值，设置一定的问题背景，可以命制如下题目：

例 9 设直线 $y=-x+2$ 与圆 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ 交于 A,B 两点，O 为坐标原点，若圆上一点 C 满足 $\overrightarrow{OC}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$，求 r 的值.（答案：$\sqrt{10}$）

小结 解题与命题犹如硬币的正反两面，两者相生相克，既有紧密的联系又是一对互逆的生成过程.两者联系的纽带是数学的思维方法、数学思想，也是教师对数学问题的深入探究.波利亚说过：“好问题同某种蘑菇有些相像,它们都成堆地生长,找到一个以后,你应当在周围找找,很可能附近就有好几个.”教师的命题研究应善于捕捉经典问题，立足于经典问题，在数学思想方法的引导下生成问题，发现新的结论，再将问题具体化、情境化并使之趣味化，循着如此思路，命出能激发学生思维兴趣的精彩好题.