

《高等代数》课程教学大纲

一、课程简介

《高等代数》是中学代数的继续和提高，通过这一课程的教学，学生能掌握为进一步提高专业知识水平所必须的代数基础理论和基本方法；加深对初等代数的理解，运用高视角、高观点处理中学数学的有关教材。本课程向学生介绍代数学中最基本的概念、理论与方法，主要包括行列式理论、矩阵理论、向量的线性相关性理论；线性方程组理论、矩阵相似理论、二次型理论；线性空间与线性变换。通过以上内容的学习，旨在训练学生数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算和数据分析的能力，内化数学核心素养；立足“三基”，延续对基础知识、基本技能和基本方法的强调，注重学生综合能力的提高。

二、教学目标

（一）总体目标

本课程设置以“育人、育才相结合”为宗旨，在教学设计中，把马克思主义立场观点方法的教育与科学精神的培养结合起来，提高学生正确认识问题、分析问题和解决问题的能力；在教学环节中，注重科学思维方法的训练和科学伦理的教育，培养学生探索未知、追求真理、勇攀科学高峰的责任感和使命感。除了要求学生理解代数学中最基本的概念，掌握行列式理论、矩阵理论、向量的线性相关性理论，线性方程组理论、矩阵相似理论、二次型理论，线性空间与线性变换等学科知识外，本课程注重数学史的渗透，希望提高学生人文素质、科学精神，注重在潜移默化中坚定学生理想信念、厚植爱国主义情怀、加强品德修养、增长知识见识、培养奋斗精神，提升学生综合素质。

（二）课程目标

课程目标 1：通过教师的言传身教，学生能积极践行社会主义核心价值观，坚定从教信念；体会高等代数的数学思想方法，感受代数方法解决问题的创造性思维，理解公理化的数学思想，形成无限与有限相统一、利用有限表达无限的辩证唯物主义观点，以及由特殊到一般的数学思考方法，完善认识世界的方法；通过代数学发展历程使学生了解到数学文化的多样性与马克思主义哲学观对现代数学发展的重要意义；通过知识的融合与深化，使学生增强学以致用能力与意识。

课程目标 2：通过本课程的学习，学生理解和掌握高等代数的基本概念、基本理论和基本方法，使学生从理论、能力、方法三方面得到基本训练，从而提高对数学的理解，为中小学数学教育提供高观点与高视角。

课程目标 3：培养学生运用代数学的理论和数学方法对实际问题进行分析和求解的能力；培养学生的代数学素养，独立思考、深入钻研问题的习惯；训练学生数学抽象、逻辑推理的能力；锻炼学生以批判的眼光看问题，观察提炼，勇于创新，形成自己的研究创新能力。

课程目标 4：注重培养学生的数学兴趣以及自主学习的能力，有针对性地推荐学生阅读一些专业文献，并鼓励学生围绕课堂内容，充分利用现代化手段，自主查阅和搜寻相关资料。在课堂教学中适时补充有关本专业与课程联系的研究，鼓励学生树立成为研究型教师、创新型教师、成长型教师的志向。

三、教学内容和学时分配

表 2 课程教学安排表

章节/单元	主要教学内容	讲课	实验 时数	实践 学时	上机 学时	主要教学方法
1	行列式	8				讲授法、讨论法、案例教学法
2	矩阵	12				讲授法、讨论法、案例教学法
3	向量与线性方程组	12				讲授法、讨论法、案例教学法
4	矩阵相似对角化	10				讲授法、讨论法、案例教学法
5	二次型	6				讲授法、讨论法、案例教学法
6	线性空间与线性变换	16				讲授法、讨论法、案例教学法
合计		64				

第一章 行列式

教学要求：了解 n 阶行列式的定义，会用定义计算简单的行列式，牢记行列式的性质。熟练掌握行列式的性质和基本计算方法，理解余子式和代数余子式的概念和行列式按一行（列）展开定理，能够熟练运用其计算行列式，体验化归、降阶等数学思想。知道范德蒙行列式的运算结果。初步掌握计算简单的行列式的计算方法。会用克莱姆法则解线性方程组。

教学内容：

(1) 行列式的定义：对角线计算方法；排列的定义和性质，逆序数，奇、偶排列； n 阶行列式的定义，上（下）三角形行列式的计算，对角形行列式的计算。

(2) 行列式的性质。

(3) 行列式的展开定理：余子式和代数余子式；行列式按行（列）展开定理。

(4) n 阶行列式的计算：行列式计算的定义法、降阶法、数学归纳法和递推法等；行列式乘法规则及其应用；范德蒙行列式； $a-b$ 型行列式；箭形行列式等。

(5) 克莱姆法则。

重点难点：（1） n 阶行列式的定义。（2） n 阶行列式的展开定理和计算。

思政元素：本章通过初等数学中解线性方程组引入行列式的概念，以二、三阶行列式为例，让学生初步理解、计算和运用行列式解决问题。通过方程的求解渗透行列式的起源，介绍行列式在多项式代数和高等代数中的地位。让学生了解数学史，体会由特殊到一般的数学思维的方法。引发学生学习数学和解决问题的兴趣，坚定学好数学以及从事数学研究和数学教学的信念。

第二章 矩阵

教学要求：理解矩阵的概念，了解单位矩阵、对角矩阵、数量矩阵、上（下）三角形矩阵的定义及其性质，了解对称（反对称）矩阵、幂等矩阵、幂零矩阵等的定义和性质。掌握矩阵的线性运

算、乘法运算及其运算规律；掌握矩阵转置的性质；了解方阵的幂和矩阵多项式，掌握方阵乘积的行列式的性质。理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质，矩阵可逆的充分必要条件；理解伴随矩阵的概念，掌握伴随矩阵求逆矩阵的方法。知道分块矩阵的定义，了解一般分块矩阵的运算。理解矩阵的初等变换及矩阵等价的概念，能用矩阵的初等变换求矩阵的等价标准形。理解初等矩阵的定义和性质，知道初等矩阵与初等变换的关系，联系初等变换这一基本方法，理解矩阵的等价理论。理解矩阵秩的概念，掌握用初等变换求逆矩阵和矩阵的秩的方法。

教学内容：

(1) 矩阵的定义与运算：矩阵的概念；矩阵的运算（矩阵的加法、数与矩阵相乘、矩阵与矩阵相乘、矩阵的转置、方阵的幂、共轭矩阵）。

(2) 几种特殊类型的矩阵：对角矩阵、数量矩阵、单位矩阵、三角矩阵；对称（反对称）矩阵；幂等矩阵、幂零矩阵。

(3) 可逆矩阵：方阵的行列式的定义和性质；行列式乘法规则；逆矩阵的定义、求法；伴随矩阵及其基本性质；矩阵方程。

(4) 矩阵的分块：分块矩阵；分块矩阵的加法、数乘和转置；可逆分块矩阵；特殊分块矩阵的若干性质。

(5) 矩阵的初等变换与初等矩阵：矩阵的初等变换，矩阵等价的定义；矩阵等价标准形；初等矩阵定义及其性质；用初等变换方法求矩阵的逆。

(6) 矩阵的秩：子式；矩阵秩的定义；初等变换求矩阵的秩；矩阵秩的若干关系式。

重点难点： (1) 矩阵的乘法运算，可逆矩阵的定义、性质和计算。(2) 矩阵的等价理论和矩阵的秩。(3) 矩阵秩的概念及其关系的理解。

思政元素： 矩阵是高等代数研究的主要对象之一，它贯穿于本课程的各方面，是求解线性方程组的有力工具。通过对《九章算术》中矩形数表的介绍引入矩阵的概念，增强学生的民族自豪感；通过对天气的马尔可夫链的介绍让学生体会到数学与生活密不可分的关系；通过各种特殊形状的矩阵的举例，让学生感受数学研究抽象与具体的统一、一般与特殊的统一；通过证明或反例讨论矩阵运算律，培养学生反思精神和严谨的思维。

第三章 向量与线性方程组

教学要求： 了解 n 维向量的概念，掌握向量的线性运算法则。理解向量组的线性组合（线性表示）、向量组的线性相关、线性无关的概念，能够判断向量组的线性相关或线性无关，掌握向量组线性相关性证明的基本方法。了解向量组等价的概念，理解极大线性无关组和向量组的秩的概念，了解向量组的秩和矩阵的秩之间的关系，会求向量组的秩、极大线性无关组并用所求的极大线性无关组表示其余向量。了解向量空间及其子空间的定义，知道空间的基、维数和坐标的概念。

掌握解线性方程组的 Gauss 消元法；掌握线性方程组有解判定定理和解的结构定理，理解齐次线性方程组的基础解系的概念，掌握齐次线性方程组和通解的求法。掌握非齐次线性方程组和通解的求法，会用其特解和导出方程组的基础解系表示非齐次线性方程组的通解。

教学内容：

(1) 线性方程组解的存在性：高斯消元法（线性方程组的系数矩阵，增广矩阵，解、解集合，同解方程组等基本概念）；解的存在性定理；利用矩阵的初等行变换解线性方程组，用自由未知量表示一般解。

(2) 向量组的线性相关性： n 维向量的概念；线性组合、线性相关、线性无关的概念，线性相关性的有关定理。

(3) 向量组的秩：向量组的线性表示，向量组的等价；极大线性无关组与向量组的秩，向量组的秩与矩阵的秩的关系。

(4) 向量空间：向量空间的概念，基、维数与坐标，子空间及其维数。

(5) 线性方程组解的结构：齐次线性方程组解的性质，非齐次线性方程组解的性质；齐次线性方程组的基础解系，齐次线性方程组解的结构，齐次线性方程组解空间概念；非齐次线性方程组解的结构；线性方程组解的几何意义。

重点难点：（1）线性方程组解的理论和向量组的线性相关性。（2）向量组的秩与矩阵的秩的一致性。

思政元素：线性方程组的求解贯穿中小学学习过程，本章研究一般线性方程组的理论和解法，这是完善和发展 n 元方程组理论与解法的必然，也是科学、工程和经济管理学中解决实际问题的数学需要。通过对《九章算术》中三元一次方程组求解的介绍，引入问题——“线性方程组有解的充要条件是什么？”、“当线性方程组有解时，有多少解，如何求解？”、“当线性方程组解不唯一时，这些解之间的关系是什么？”，让学生求解中感受中国古代数学的魅力，增强民族自豪感；同时，结合旧知识，有效运用知识的迁移；最后，让学生感受到从特殊到一般的数学思想。

本章概念较多，较为抽象，通过对相似概念的辨析与不同概念的理解能有效地训练学生数学抽象和逻辑推理的能力；而对于本章节定理，如线性方程组的有解判定、解的性质和解的结构理论可以帮助学生站在高视角、高观点重新审视初等数学。

第四章 矩阵相似对角化

教学要求：了解内积的概念，会计算 n 维向量的内积、长度和夹角.掌握线性无关的向量组正交规范化的施密特方法.理解正交矩阵的概念和性质.理解矩阵的特征值和特征向量的概念，掌握特征值和特征向量的性质，掌握求特征值和特征向量的方法.掌握相似矩阵的概念，掌握相似矩阵的性质，了解矩阵可以对角化的条件，能够判定方阵是否可对角化，掌握将矩阵化为对角形矩阵的方法.掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质，掌握将实对称矩阵正交相似化为对角形矩阵的方法.

教学内容：

(1) 欧氏空间：向量的内积，施密特正交化方法，标准正交基；正交矩阵及其性质。

(2) 方阵的特征值与特征向量：特征值与特征向量的概念，特征值与特征向量的性质。

(3) 矩阵相似对角化条件：相似矩阵及其性质，矩阵可对角化的判定条件；简单的线性模型建立和应用。

(4) 实对称矩阵的相似对角化：实对称矩阵的特征值与特征向量；实对称矩阵相似对角化。

重点难点：（1）矩阵的特征值和特征向量的概念和性质。（2）矩阵相似理论和实对称矩阵的相似对角化方法。（3）矩阵相似对角化的等价命题的理解和综合运用。

思政元素：结合几何空间的背景，在实线性空间中引入内积形成欧氏空间，让学生体会从具体数学对象拓展到抽象数学概念的形成过程，领会数学发展的基本思想方法；反之，将欧氏空间的柯-布不等式和向量正交等抽象理论应用于初等数学，让学生体会从不同的视野看待问题的思想方法，更加坚定学好数学从事数学教学的志向。通过对矩阵的重要数字特征（特征值）的介绍，引入矩阵相似对角化的条件及应用，在实际问题中让学生熟悉矩阵相似对角化的求解方法，培养学生分析问题、解决问题的能力。

第五章 二次型

教学要求：了解二次型的概念，会用矩阵形式表示二次型，了解矩阵合同的概念.了解二次型的秩的概念，了解二次型的标准形的概念，掌握用正交变换化实二次型为标准形的过程，会求非退化线性替换化二次型为标准形（即配方法化二次型的平方和）。了解二次型的规范形的概念，了解实二次型的惯性定理的条件和结论。理解正定二次型和正定矩阵的概念，掌握正定矩阵的性质和判定方法。

教学内容：

（1）二次型及其矩阵表示：二次型的矩阵表示，二次型的定义；二次型的矩阵，二次型的秩；非退化线性替换等基本概念；矩阵的合同的定义和性质。

（2）化二次型为标准形：二次型的标准形；正交替换法，配方法与初等变换法化二次型为标准形。

（3）化二次型为规范形：实二次型的规范形；实二次型的规范形及其唯一性；惯性定理，惯性指数，符号差；复二次型的规范形及其唯一性；复对称矩阵的合同标准形。

（4）正定二次型与正定矩阵：正定二次型的定义和性质；正定矩阵；二次型正定的等价条件，半正定二次型；实对称矩阵的合同标准形。

重点难点：（1）配方法求二次型的标准型，正交变换法求实二次型的标准型。（2）实二次型对的正定性。（3）实二次型的惯性定理和正定性理解。

思政元素：通过讲解中学解析几何的二次曲线二次曲面的方程到二次型，从平面上的旋转变换到二次型的线性替换，让学生体会从特殊事物抽象出一般规律的数学思想；通过讲解实数域上二次型的分类，引发学生用高等数学的语言描述和解决中学数学问题的兴趣。

第六章 线性空间与线性变换

教学要求：掌握线性空间的定义和例子；掌握线性空间的简单性质；掌握线性子空间，子空间的交、子空间的和等概念；了解实内积空间的的概念，知道如何用 Schmidt 正交化得到正交向量组。掌握线性空间基、维数与坐标的概念与求解方法，会求一组基到另一组基的过渡矩阵。理解线性变换的定义及简单性质，会求线性变换的矩阵表示。掌握线性变化在不同基下的矩阵的计算方法。

教学内容：

（1）线性空间的定义和例子：线性变换的定义，全体 $m \times n$ 矩阵构成的线性空间。

(2) 子空间、子空间的交、和以及直和：子空间的定义；子空间交的定义和例子，子空间和的定义和例子。

(3) 实内积空间：实内积空间的定义及例子；

(4) 线性空间的基、维数和坐标：线性空间基的定义，全矩阵空间的基，维数公式；线性空间中向量在一组基下的坐标表示，任一 n 维线性空间与 \mathbb{R}^n 的对应关系；过渡矩阵的概念及求法

(5) 线性变换：线性变换的定义，有限维空间的线性变换的矩阵，线性变换在不同基下的矩阵的关系。

重点难点： (1) 线性空间的定义。(2) 基、维数与坐标的定义以及相关性质。(3) 过渡矩阵，坐标变换公式。(4) 线性变换的定义及性质，有限维空间的线性变换的矩阵，线性变换在不同基下的矩阵的关系。

思政元素： 通过讲解几何空间到一般线性空间的定义，从直角坐标系和 n 维单位向量组到线性空间的基和坐标，让学生体会从不同数学对象中抽象概括出共性的数学思想方法；通过讲解一组基到另一组基的过渡矩阵，线性变换在不同基之间的关系，让学生体会到事物普遍联系的哲学观点；通过说明任一 n 维线性空间与 \mathbb{R}^n 的对应关系，让学生感受到以简代繁，由繁入简，用熟知且简单的数学对象来描述复杂且抽象的数学对象的思想方法。

四、教学方法

1. 讲授法： 通过讲授本课程的基本概念与基本原理，帮助学生了解并掌握行列式理论、矩阵理论、向量的线性相关性理论；线性方程组理论、矩阵相似理论、二次型理论。在授课中，通过数学史导入、例题导入、新旧知识联系等方法帮助学生体会数学研究中提出问题、分析问题、解决问题的思想方法。

2. 讨论法： 针对行列式的计算、矩阵可逆的等价条件、反对称矩阵的相关性质、有关幂等矩阵的基本结论，斐波那契数列的通项公式的代数求法等专题组织学生研讨，深化高等代数课程知识的理解。

3. 案例教学法： 主要用于习题课。解题教学是数学教学的基本内容，通过典型习题的剖析，训练数学思维，引导学生掌握基本思维方法，提升数学学科核心素养。

五、课程教学资源

选用教材

《线性代数（第4版）》，陈建华主编，北京：机械工业出版社，2017.1。

[说明：该教材是普通高等教育“十一五”国家级规划教材、“十二五”江苏省高等学校重点教材，普通高等院校基础课规划教材]

选读书目

[1] 同济大学应用数学系.线性代数（第六版）[M].北京：高等教育出版社，2014.6

[2] 赵树嫄.线性代数(第5版)[M].北京：中国人民大学出版社，2017.8

[3] 居余马等.线性代数[M].北京：清华大学出版社，2002

- [4] 陈维新.线性代数[M].北京：科学出版社，2004
- [5] Steven J.Leon. Linear Algebra [M].北京：机械工业出版社，2004
- [6] 北京大学力学系几何与代数教研室代数小组编.高等代数[M].北京：高等教育出版社，2003
- [7] David C.Lay 著，刘深泉等译.线性代数及其应用[M].北京：机械工业出版社，2005
- [8] 李尚志编著.线性代数[M].北京：高等教育出版社，2006
- [9] 申大维等译.数学的原理与实践[M].北京：高等教育出版社，1998
- [10] Michael Artin. Linear Algebra [M].北京：机械工业出版社，2004
- [11] Bernard Kolman. Elementary Linear Algebra [M]. Macmillan Publish Company, 1986
- 学习网站：<http://eol.yzu.edu.cn/meol/personal.do>